E.N.S. FONTENAY & SAINT-CLOUD 1979
Option "Mathématiques" (M')

MATHEMATIQUES III (appliquées)

DURÉE : 3 heures

Les vecteurs et matrices considérés sont réels. On notera de la même manière un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ et la matrice colonne de ses composantes dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

La transposée d'une matrice B est notée ${}^tB$ et $\|x\| = ({}^txx)^{1/2}$ désigne la norme euclidienne de la matrice colonne x ou du vecteur x.

Soit $z \in \mathbb{R}^n$ et soit A une matrice carrée symétrique d'ordre n positive non dégénérée, c'est-à-dire telle que ${}^tx\mathrm{A}x > 0$ si $x \neq 0$.

I

Étant donné un vecteur $x_0 \in \mathbb{R}^n$, on définit deux suites de vecteurs r_p, $x_p \in \mathbb{R}^n$ par

$$\left| \begin{array}{ll} r_p = \mathrm{A}x_p - z & , p \geqslant 0, \\ x_{p+1} = x_p - \rho_p r_p, & p \geqslant 0, \end{array} \right.$$

où ρ_p est une suite de nombres que l'on va préciser.

1° Déterminer ρ_p pour que ${}^tr_{p+1}r_p = 0$.

2° Vérifier que $\|x\|_{\mathrm{A}} = ({}^tx\mathrm{A}x)^{1/2}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

3° On pose $\varepsilon_p = x_p - \bar{x}$, où $\bar{x}$ désigne l'unique solution de $\mathrm{A}x = z$. Démontrer que

$$\|\varepsilon_{p+1}\|_{\mathrm{A}}^2 = \|\varepsilon_p\|_{\mathrm{A}}^2 - \|r_p\|^4 / \|r_p\|_{\mathrm{A}}^2 .$$

4° On note λ (resp. Λ) la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de A. Montrer que

$$\|\varepsilon_{p+1}\|_{\mathrm{A}}^2 \leqslant \|\varepsilon_p\|_{\mathrm{A}}^2 \left(1 - \frac{\lambda}{\Lambda}\right).$$

En déduire la convergence de x_p vers $\bar{x}$ pour les normes $\|\ \|$ et $\|\ \|_{\mathrm{A}}$.

.../...

II

On pose $J(x) = \frac{1}{2}\,{}^t x A x - {}^t z x$.

1° Montrer que $\bar{x}$ est caractérisé par $(J(\bar{x}) \leqslant J(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n)$.

2° On note $GJ(y)$ le vecteur gradient de J au point y. On pose $s_p = GJ(y_p)$ et $y_{p+1} = y_p - \sigma_p s_p$ où $\sigma_p \in \mathbb{R}$. Déterminer σ_p pour que

$$J(y_{p+1}) = \inf_{\sigma \in \mathbb{R}} J(y_p - \sigma s_p).$$

3° Soit $k \in \mathbb{R}$ et soit $Q_k = \{x \in \mathbb{R}^n,\ J(x) = k\}$. Montrer que le point $\bar{x}$ est centre de symétrie de l'ensemble Q_k.

4° On suppose que $n = 3$. Soit x_p un point de $\mathbb{R}^n$ et soit N_p la normale en x_p à la surface Q_k qui passe par x_p. On appelle x_{p+1} le point de cette normale où une autre surface $Q_{k'}$, pour k' convenable, est tangente à N_p. Écrire la relation liant x_{p+1} et x_p.

5° Commenter brièvement les relations entre les questions 2° et 4° de I et II.

III

On considère le problème

$$(*)\quad \begin{cases} y''(x) = q(x)\,y(x) + f(x)\ , & x \in [a, b]\ , \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases}$$

où f et q sont des fonctions continues données sur $[a, b]$ avec $q(x) \geqslant 0$.

On pose $V = \{z \in C^1[a, b]\ ;\ z(a) = z(b) = 0\}$.

1° Montrer que si $y \in C^2[a, b]$ est solution de $(*)$, alors y réalise le minimum dans V de

$$G(z) = \int_a^b [z'(x)^2 + q(x)\,z(x)^2 + 2f(x)\,z(x)]\,dx.$$

2° Soit M un entier. On pose $h = \frac{b-a}{M+1}$ et $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \ldots, M+1$. On définit y_i, $i = 0, 1, \ldots, M+1$, par $y_0 = y_{M+1} = 0$ et

$$y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_i = h^2 q(x_i)\,y_i + h^2 f(x_i)\ , \quad i = 1, 2, \ldots, M.$$

Montrer que les y_i, $i = 1, 2, \ldots, M$, peuvent être calculés par la méthode de I.

3° On suppose que $y \in C^4[a, b]$; expliciter le système linéaire vérifié par l'erreur $e_i = y_i - y(x_i)$ sous la forme $Ae = h^4\Theta$.

4° On pose $B = A^{-1}$ et $B = (b_{mn})$, m indice de la ligne et n indice de la colonne. On admet que

$$b_{mn} = m\,\frac{M+1-n}{M+1}\ , \quad \text{si} \quad m \leqslant n,$$

$$b_{mn} = n\,\frac{M+1-m}{M+1}\ , \quad \text{si} \quad n \leqslant m.$$

En déduire que $\|e_i\| \leqslant Kh^2$, $i = 1, 2, \ldots, M$, où K est une constante à préciser.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail